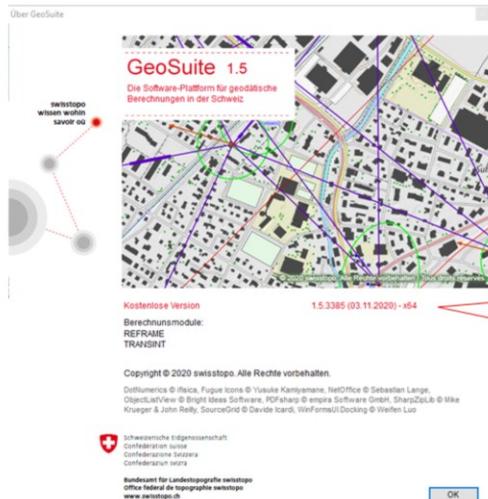


# Transformations- und Interpolationsalgorithmen



neue Version seit  
6. November 2020

mit allen Berechnungsmodulen  
kostenlos erhältlich!

13.11.2020 Prof. em. Beat Sievers

## Begrüssung

Basis meines Vortrags waren die Folien meiner Präsentation im Workshop «Transformationen in der Schweiz» bzw. «GeoSuite-TRANSINT», den wir in 2007, 2008 und 2013 an der FHNW durchgeführt haben und der auf guten Anklang gestossen ist. Ich habe sie zwischenzeitlich überarbeitet und ergänzt.

Matthias Kistler war damals als Vertreter des Bundesamtes für Landestopografie swisstopo wesentlich am Erfolg mitbeteiligt.

Für GeoSuite gibt es seit 6.11.2020 eine neue Version. Sie ist mit allen Berechnungsmodulen (REFRAME, TRANSINT, LTOP, GEOREF) gratis; LTOP soll ab Frühling 2021 ebenfalls verfügbar sein.

## Agenda

1. Grundlagen
2. Merksätze
3. zwei Transformationen (Helmert, affin)
4. Genauigkeit von Restklaffungen und ihre statistische Verteilung
5. neun Interpolationen (Fineltra, IDW, TRANSINT, Shepard, Polynome) mit Variationen
6. Erkenntnisse
7. Visualisierung
8. Fragen klären



## Grundlagen (Literaturhinweise)

- **Empfehlung für die Anwendung geometrischer Transformationsmethoden in der amtlichen Vermessung**, Version 3.0 (swisstopo, 14. November 2017)
- **Benutzeranleitung TRANSINT** (swisstopo, November 2002) jetzt integriert in die
- **GeoSuite Benutzeranleitung** (swisstopo, November 2020), [URL](#)
- Furrer, Michael; Sievers, Beat (2009): «**Qualitätsindikatoren für den Bezugsrahmenwechsel LV03-LV95**» In: Geomatik Schweiz, 107 (2009), 01, [S. 20-24](#)
- Sievers, Beat; Fischer, Beat (2011): «**Interpolationen und Kurvenbestimmung**» In: Geomatik Schweiz, 109 (2011), 06, S. [299–301](#)
- Sievers, Beat (2020): **Interpolationen in GeoSuite**. Muttenez: FHNW-IVGI und absehbar: **Über die Genauigkeit von Restklaffungen**

*Alle diese Dokumente enthalten weitere Literaturquellen und Erkenntnisse !*

Die «Empfehlung für die Anwendung geometrischer Transformationsmethoden in der amtlichen Vermessung» wurde im Auftrag von swisstopo verfasst von

Raymond Durussel

Laurent Huguenin

Beat Sievers

Die Artikel der Zeitschrift «Geomatik Schweiz» sind zu finden in <https://www.e-periodica.ch/digbib/hitlist?p=f4e>

Siehe neben (Furrer; Sievers 2009) auch

Wieser, Andreas; Lienhart, Werner; Brunner, Fritz K. (2003):

«Nachbarschaftstreue Transformation zur Berücksichtigung von Spannungen im amtlichen Festpunktfeld» In: Österreichische Zeitschrift für Vermessung & Geoinformation, Band 91 (2003), Ausgabe 2, Seiten 115–122.

Die Publikation (Sievers 2020) vertieft die Shepard Interpolationen und ihre Steuerparameter. Sie erhalten sie bei mir oder als Beilage zu dieser Präsentation. Die neue GeoSuite Benutzeranleitung enthält Auszüge daraus.

«Über die Genauigkeit von Restklaffungen» wird bis Ende November 2020 nachgeliefert.



## Merksätze

**Scio nescio «Ich weiss, dass ich nicht weiss»** Sokrates (470 - 399 v.Chr.)

S. 11 auf dem Gebiet der Transformationen (*und Interpolationen*) gibt es **keine «Wunderlösungen»**

S. 12 **Transformationen und Interpolationen führen weder zur Korrektur von «versteckten» groben Fehlern noch zur automatischen und systematischen Verbesserung der Gesamtheit der Daten**

S. 93 **durch die Transformation / Interpolation können die relativen Unsicherheiten der alten Daten kaum verbessert werden.**

Viele praktische Versuche bestätigten die Merksätze des Transformationsleitfadens. Eine Interpolation verschlechtert die Qualität des Gebietes eher.

(Seitenzahlen beziehen sich auf die Empfehlung Transformationsmethoden in der AV)

Seit 1976 (ETH Diplomabschluss) befasse ich mich mit Transformationen und komme immer mehr zum Schluss von Sokrates...

**Transformationen**

## Definition, Formel

Eine Transformation verknüpft 2 Bezugsrahmen mit homologen Passpunkten <sup>1</sup> durch eine mathematische Operation. Nachfolgend beschränkt auf den 2D Fall:

$$\begin{aligned}
 Y_{\text{Ziel}} + v_Y &= Y^{\text{transformiert}} = Y_0 + a \cdot Y_{\text{Start}} + b \cdot X_{\text{Start}} \\
 X_{\text{Ziel}} + v_X &= X^{\text{transformiert}} = X_0 - d \cdot Y_{\text{Start}} + e \cdot X_{\text{Start}}
 \end{aligned}
 \quad
 \boxed{
 \mathbf{X}_i + \mathbf{v}_i = \mathbf{X}_0 + \begin{bmatrix} a & b \\ -d & e \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_i
 }$$

Helmert (konform):  $b = d = m \cdot \sin \omega$        $a = e = m \cdot \cos \omega$

affin:  $b = N_x \cdot \sin \psi$        $a = M_y \cdot \cos \varphi$   
 $d = M_y \cdot \sin \varphi$        $e = N_x \cdot \cos \psi$

Berechnung  $m, \omega, N_x, M_y, \varphi, \psi$  gemäss Transformationsempfehlung S. 49 , 45

<sup>1</sup> Passpunkt = Stützpunkt = Knoten (engl. fiducial point, node)

Die Koordinaten des Zielsystems Y, X werden im schweizerischen Bezugsrahmen LV95 heute bezeichnet mit E, N

blaue Zeichen bedeuten: Beobachtung, Zufallsvariable

rote Zeichen bedeuten: konstante Koeffizienten

grüne Zeichen bedeuten: unbekannte, in einer Ausgleichung zu bestimmende Grössen

Fett gedruckte Buchstaben bezeichnen immer Vektoren oder Matrizen (d.h. Matrizen Schreibweise)

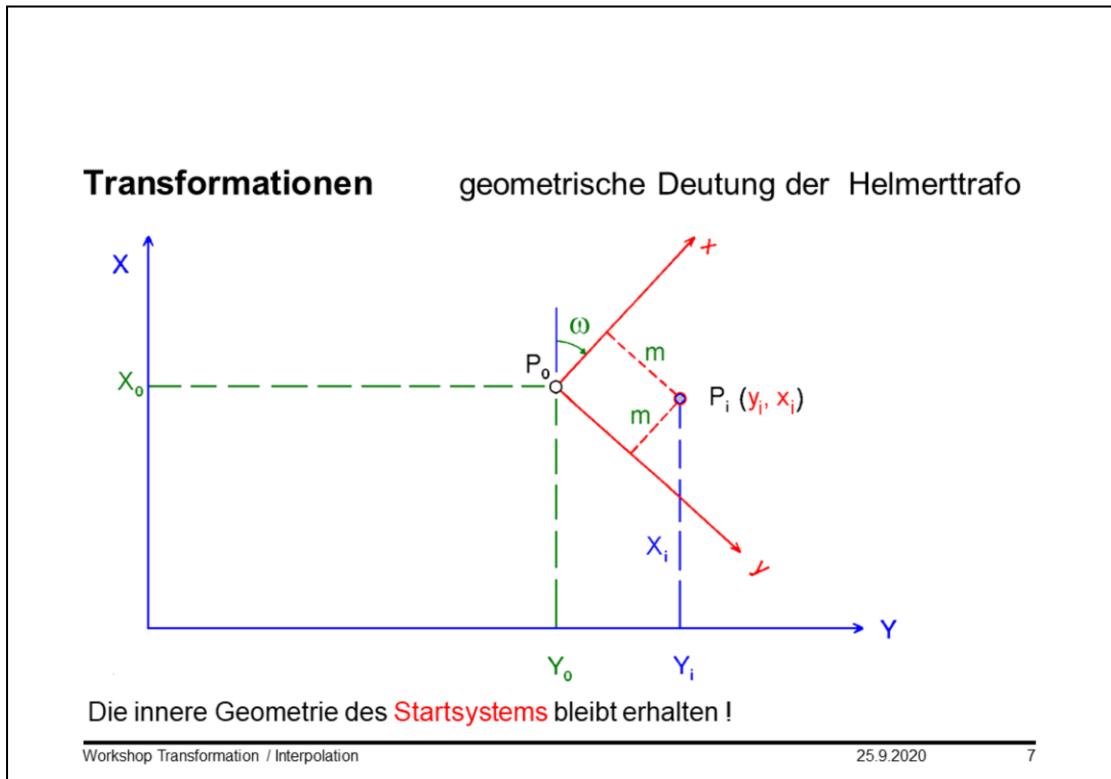
Transformationen	Bedeutung der Symbole
$Y_{\text{Ziel}}, X_{\text{Ziel}}$	«gemessene» Koordinaten im Zielsystem (d.h. Beobachtungen)
$v_Y, v_X$	Restklaffungen, Residuen (d.h. Verbesserungen im Zielsystem)
$Y_{\text{Start}}, X_{\text{Start}}$	gegebene, <b>starre</b> Koordinaten im Startsystem (d.h. konstante Werte)
$Y, X^{\text{transformiert}}$	gesuchte, ins Zielsystem transformierte Koordinaten des Startsystems
<u>unbekannte Parameter</u> (der vermittelnden Ausgleichung):	
$Y_0, X_0$	Position des Ursprungs des Startsystems im Zielsystem
$m, N_x, M_y$	Skalierung des Startsystems (-Achsenabschnitte)
$\omega$	Azimut der x-Achse (Startsystem) im Zielsystem
$\psi, \varphi$	Rotation der x- bzw. y-Achse ausgehend von X- bzw. Y-Achse
Workshop Transformation / Interpolation	
25.9.2020	
6	

Die Beobachtungen sind Zufallsvariablen, also sind sie als «gute» Koordinaten «fehlerbehaftet» und werden verbessert, die «schlechten» Koordinaten des Startsystems sind unendlich genau

Das bereitet Mühe beim Verstehen, ist aber im Transformationsmodell so verankert und nicht zu ändern.

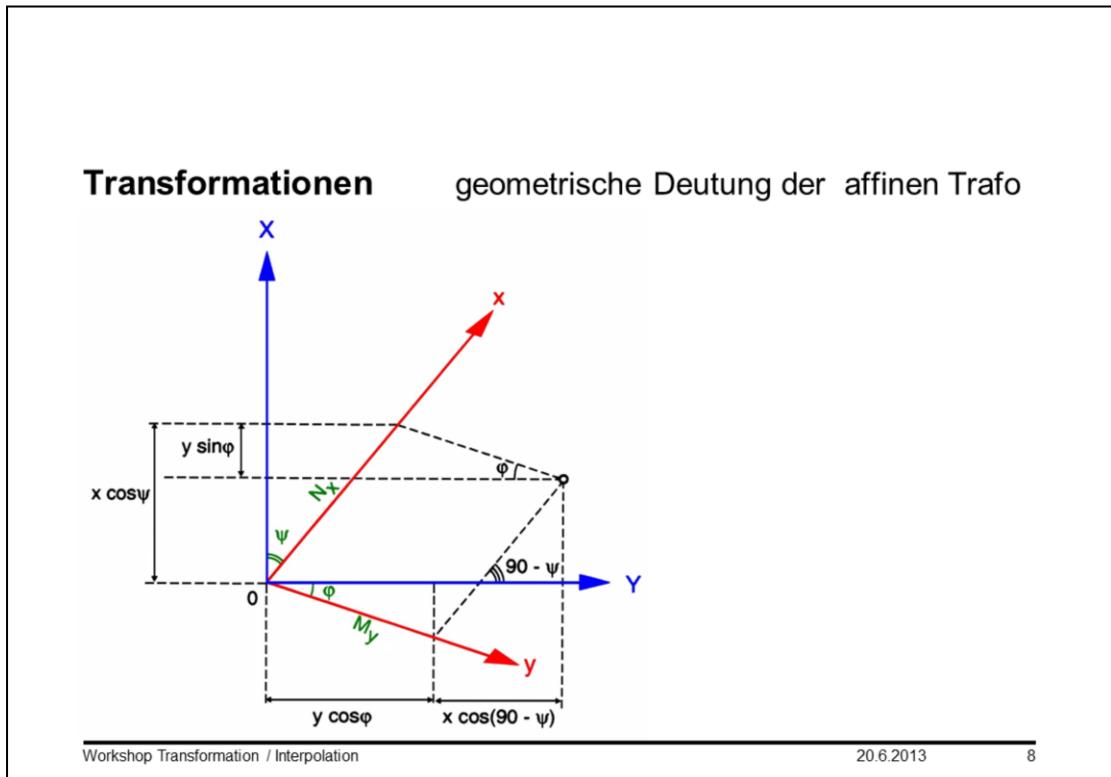
Drehungen:  $\omega$  (Omega),  $\psi$  (Psi),  $\varphi$  (Phi)

Ich werde im folgenden oft von «Neupunkten» sprechen. Ich meine damit die Punkte des Startsystems, deren Koordinaten im Zielsystem zu berechnen sind.



Das Startsystem (rot) wird ins Zielsystem (blau) geschoben ( $Y_0, X_0$ ), verdreht ( $\omega$ ) und vergrößert oder verkleinert ( $m$ )

Der Drehwinkel  $\omega$  ist das Azimut der Startsystem x-Achse im Zielsystem



Die Masstäbe und die beiden Drehungen beziehen sich auf die jeweilige Achse des Startsystems. Es gibt eine Achse mit maximalem Masstab und eine mit minimalem. Diese Extrem-Achsen werden auch Hauptachsen genannt.

Der Begriff «Scherung» bezieht sich auf die Winkelverzerrung einer transformierten Figur und ist in der GeoSuite Benutzeranleitung mathematisch definiert (Seiten 107 bis 109).

<b>Transformationen</b>	<b>Eigenschaften</b>	
<b>Eigenschaft</b>	<b>ebene Ähnlichkeitstransformation</b>	<b>ebene Affintransformation</b>
Anwendungsgebiete	Vergleich Netzresultate (Varianten, Deformationsmessungen) <b>Homogenisierung</b> (Entzerrung) alter Vermessungswerke Vorstufe für komplexe Interpolationsverfahren <b>(beliebige Datumsübergänge)</b>	Elimination von <b>gerichteten Verformungen</b> (z.B. Papierverzug, Scanner) Interpolationsverfahren mit maschenweise affinen Transformationen in einem triangulierten Gebiet Bezugsrahmenwechsel ( <b>LV03↔LV95</b> )
Minimale Anzahl Passpunkte	2	3
Transformationsparameter	$Y_0, X_0, m, \omega$	$Y_0, X_0, M_y, N_x, \varphi, \psi$
Transformationsformeln	(beobachtete) Zielsystem-Koordinaten sind lineare Funktion der (konstanten) Startsystem-Koordinaten: $\begin{cases} X^T = X_0 + m \cdot \cos \omega \cdot x - m \cdot \sin \omega \cdot y \\ Y^T = Y_0 + m \cdot \sin \omega \cdot x + m \cdot \cos \omega \cdot y \end{cases}$	$\begin{cases} X^T = X_0 + N_x \cdot \cos \psi \cdot x - M_y \cdot \sin \varphi \cdot y \\ Y^T = Y_0 + N_y \cdot \sin \psi \cdot x + M_x \cdot \cos \varphi \cdot y \end{cases}$
Massstab	in allen Richtungen und an allen Orten gleich	<b>2 ausgezeichnete Richtungen</b> mit maximalem (und minimalem) Massstab (Verzerrungsellipse)
Geometrische Eigenschaften	Streckenlängen ändern sich gleichmässig <b>Winkel bleiben erhalten</b> <b>Form der Figuren bleibt unverändert</b> - Quadrate bleiben erhalten - Kreise bleiben erhalten	Geradlinigkeit bleibt erhalten Parallelität bleibt erhalten Teilungsverhältnis in geraden Linien bleibt erhalten Grössenverhältnis von Flächen bleibt erhalten : Streckenlängen ändern sich richtungsabhängig <b>Winkel werden verzerrt</b> <b>Form der Figuren bleibt nicht erhalten:</b> - Quadrate werden zu Parallelogrammen - Kegelschnitte bleiben erhalten (Kreis → Ellipse)
Korrelationen zwischen fingierten Koordinatenbeobachtungen		werden in der Regel vernachlässigt
Numerik		<b>mit (auf den Schwerpunkt) reduzierten Koordinaten rechnen</b>
Redundanz bei den Passpunkten		Transformierte Koordinaten sind von den Sollkoordinaten verschieden (→ Restklaffungen)
Anwendung		nicht geeignet für lokale, <b>unregelmässige</b> Verzerrungen

Hier eine Zusammenstellung der Eigenschaften der Helmert- und affinen Transformation.

Beachten Sie die **fett** gedruckten!

**Transformationen**

$$m_0 = \sqrt{\frac{[v_x v_x] + [v_y v_y]}{2n - u}}$$

$$m_p = m_0 \cdot \sqrt{2}$$

**Genauigkeiten (2D)**

empirische Standardabweichung an X oder Y

♣ **aus der Transformation** ♣

n = Anzahl Passpunkte; u : HT = 4 , AT = 6

Helmert'scher Punktfehler

**Ausreisser** liegen vor, wennAblauf der Analyse gemäss ([Furrer; Sievers 2009](#))

Residuenlänge  $v_x$  oder  $v_y > 1.96 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sigma_x \text{ oder } \sigma_y)$  für  $\alpha = 5\%$  (Irrtumsrisiko)  
 $> 2.58 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sigma_x \text{ oder } \sigma_y)$  für  $\alpha = 1\%$

$\sigma_x$  oder  $\sigma_y$  ist die theoretische Standardabweichung der X oder Y Koordinate der Passpunkte (a priori; Erfahrungswerte annehmen)

$$fs = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} > 3.46 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_x \quad \text{für } \alpha = 5\% \\ > 4.29 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_x \quad \text{für } \alpha = 1\% \quad \left. \vphantom{fs} \right\} \text{ unter der Annahme } \sigma_x = \sigma_y$$

Die empirische Standardabweichung  $m_0$  entspricht der Lagegenauigkeit  $m_x = m_y$  eines eingepassten Passpunktes nach TVAV Art. 101.

Die Koordinaten der Passpunkte im Zielsystem (z.B. LV95, neu erhoben) sind meist viel genauer als ihre Koordinaten im Startsystem (z.B. gescannt aus alten Papierplänen).

Deshalb sagt  $m_0$  weniger über die Genauigkeit der Beobachtungen Y, X aus, als vielmehr über die Qualität des Transformationsmodells.

Deshalb wird oft der Helmert'sche Punktfehler verwendet, bei Transformationen auch **mittlerer Punktfehler** genannt.

Der Helmert'sche Punktfehler ist jedoch kein statistisches Mass und folgt keiner Wahrscheinlichkeitsverteilung!

Er ist ein häufig benutztes **skalares Kriterium für die Beurteilung der Lagegenauigkeit**, d.h. er ist eine Zahl und hat nicht mit einer statistischen Verteilung zu tun.

-----  
 Fehlertheoretische Begründung für die Ausreisser Grenzwerte (mit Gauss'schem Fortpflanzungsgesetz), siehe auch separates Dokument «Über die Genauigkeit von Restklaffungen»

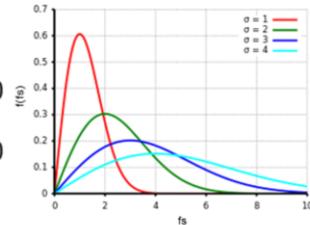
Wurzel(2)\*( $\sigma_x$  oder  $\sigma_y$ ) ist die theoretische Standardabweichung der Residue  $v$  (= Koordinatendifferenz) eines Passpunktes in X- oder Y-Richtung wenn  $v$  in Richtung X und Y gleich genau sind (d.h. isotrop), ist  $fs = \text{Wurzel}(2)$  mal die Genauigkeit von  $v$

Die Rayleigh-Quantilwerte sind 2.45 für  $\alpha = 5\%$  und 3.03 für  $\alpha = 1\%$  ; mal  
Wurzel(2) gibt 3.4616 bzw. 4.2919

## Statistische Verteilung der Residuen $f_s$ (2D)

Die Residuen (Restklaffungen)  $f_s = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  sind Rayleigh verteilt:

$$\text{Wahrscheinlichkeitsdichte } f(f_s | \sigma_{f_s}) = \begin{cases} \frac{f_s}{\sigma_{f_s}^2} e^{-\frac{f_s^2}{2\sigma_{f_s}^2}} & f_s \geq 0 \\ 0 & f_s < 0 \end{cases}$$



$$\text{Verteilungsfunktion } F(f_s) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{f_s^2}{2\sigma_{f_s}^2}} & f_s \geq 0 \\ 0 & f_s < 0 \end{cases}$$

Graph siehe folgende Folie

$$\text{Erwartungswert } E(f_s) = \sigma_{f_s} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{Median} = \sigma_{f_s} \sqrt{2 \cdot \ln(2)} \quad \text{Varianz } \text{Var}(f_s) = \frac{4 - \pi}{2} \sigma_{f_s}^2$$

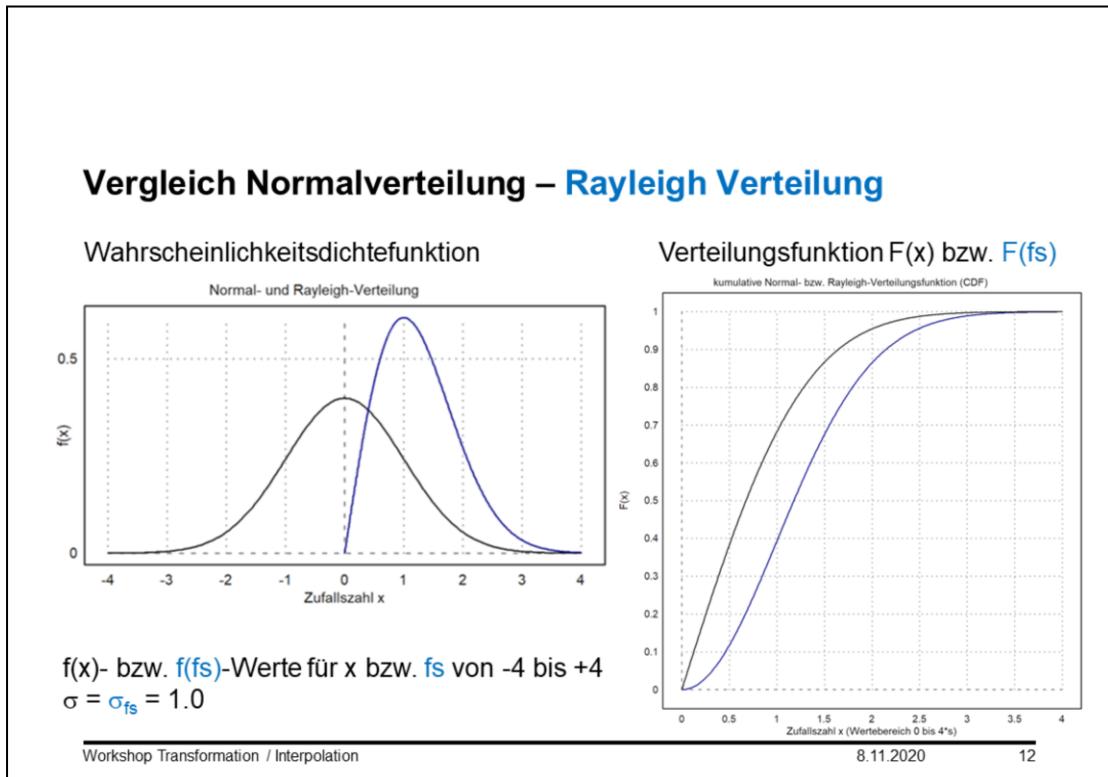
Wenn die Komponenten  $v_y$  und  $v_x$  eines zweidimensionalen Zufallsvektors  $\mathbf{v}$  (hier der Restklaffung) normalverteilt und stochastisch unabhängig sind, dann ist der Betrag Rayleigh-verteilt.

Die Rayleigh Verteilung ist übrigens identisch mit der Wurzel aus der Chiquadrat Verteilung mit Freiheitsgrad 2.

Wahrscheinlichkeitsdichte:  $f_s$  ist die Zufallsvariable,  $\sigma_{\phi\sigma}$  der sogenannte Parameter, bei uns die Standardabweichung von  $f_s$

Für 3D Residuen könnte ich eine analoge Entwicklung darstellen. Da sie aber in der amtlichen Vermessung zurzeit noch obsolet ist, verzichte ich darauf.

Der Erwartungswert ist der theoretische Mittelwert von unendlich vielen Werten (d.h. der Grundgesamtheit), beim Median liegen 50% über und 50% unter dem Medianwert. Diese Werte gelten jedoch nur, wenn keine Ausreisser und keine systematischen Abweichungen im Datensatz sind. Die Statistiker sprechen von «unbiased estimators» (d.h. unverfälschte Schätzwerte)



PDF: Probability density function, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

CDF: Cumulative distribution function, Verteilungsfunktion

Die rechte Grafik lässt sich bildlich so erklären: Stellen Sie sich in der linken Grafik einen senkrechten Lineal vor, den Sie von minus Unendlich langsam nach plus Unendlich, also nach rechts verschieben. Die Fläche, die zwischen Abszisse (Grundlinie), schwarzer oder blauer Dichtekurve und Lineal entsteht, ist die aufsummierte Wahrscheinlichkeit in der rechten Grafik.

## Vergleich TVAV 101 ↔ Ausreisser aus Rayleigh Verteilung

(gerechnet mit den Formeln aus Folie 10 unten)

TVAV Art. 101, Abs. 1			Rayleigh 5%	Rayleigh 1%	
Masstab	$\sigma$ Passpunkt	Restfehlervektor	<b>Ausreisser, wenn <math>f_s &gt;</math></b>		
1:500	8	max. 24.0 cm	39.1	48.5	cm
1:1000	16	max. 48.0 cm	78.3	97.1	cm
1:2000	32	max. 96.0 cm	156.6	194.1	cm
<b>Weisung Punktgenauigkeit vom 1.1.2015, Abs. 5.1</b>					
Tol.stufe	$\sigma$ Punkt	Toleranz = $3 \cdot \sigma$	Rayleigh 5%	Rayleigh 1%	
GP TS3	7	21	34.3	42.5	cm
GP TS4	15	45	73.4	91.0	cm
GP TS5	35	105	171.3	212.3	cm

ein Widerspruch? ⇒ die TVAV ist strenger als die geodätische Statistik

Workshop Transformation / Interpolation

8.11.2020

13

**Grenzwert für Ausreisser aus Rayleigh Verteilung:** Formeln siehe Folie 10 unten

Vorbemerkung: die Sigma-Werte sind **theoretische** Standardabweichungen, d.h. a priori Werte! Sie gelten für die Grundgesamtheit (mit unendlicher Häufigkeit).

### Toleranzwerte vereinfachtes Verfahren

Richtwerte für Planeinpassung von grafischen Vermessungswerken *mittels Transformation*

TVAV Art. 101-103 (Prov. Numerisierung)

⇒ Standardabweichung für z.B. Kartonplan 1:1000 32cm (max. 96cm) bei Alu-Platten werden die Werte um 25% reduziert

### Punktgenauigkeit

Weisung Punktgenauigkeit vom 1.1.2015, Abs. 5.1

⇒ z.B. GP, exakt definiert,

Standardabweichung in TS3/TS4/TS5: 7/15/35cm

(für die Beurteilung einzelner Widersprüche gilt als Toleranzgrenze: 21/45/105cm)

Die Toleranz  $3 \cdot \sigma$  gilt für die Punktgenauigkeit (grosse Halbachse der Konfidenzellipse) aus einer Ausgleichung, die Rayleigh-Ausreisserwerte gelten für die Abweichungen eines abgesteckten vom «Soll»-Punkt

## Interpolation

## Affintransformation nach finiten Elementen

**1** maschenweise Affintransformation, sie ist eine Interpolation !

«Masche» ist ein Dreieck, aufgespannt von 3 Transformationsstützpunkten (TSP)

Software: (FINELTRA) ; REFRAME (mit [CHENyx06 Datensatz](#)) ; GeoSuite → TRANSINT → Interpolation → Fineltra (Dreiecksvermaschung)

**keine Überbestimmung!** 3 TSP × 2 Koordinaten = 6 Gleichungen, um die 6 Parameter ( $Y_0$ ,  $X_0$ , a, b, d, e) zu bestimmen

⇒ **es braucht Kontrollpunkte (KP) !!!**

⇒ **bei Einsatz in lokalen Entzerrungsarbeiten sehr sorgfältig mit KP prüfen**

Theorie siehe Transformationsempfehlung 4.5.2 (S. 58 – 62) bzw. Programmanleitungen

## Interpolation

## Methodik

«Interpolation heisst Zuweisung eines zugehörigen berechneten Wertes für nicht direkt gemessene Punkte unter Annahme über den Verlauf zwischen den bekannten Punkten» (Ralf Bill, 1996).

Die Koordinaten der Passpunkte in einem «guten» Zielsystem sollen nicht ändern. Restklaffungen  $v_x$ ,  $v_y$  sind daher nicht erwünscht. Sie werden zu Null kompensiert und die benachbarten (transformierten) Neupunkte werden entsprechend mitgezogen (**Nachbarschaftsprinzip**).

**! Die innere Geometrie des Startsystems wird zerstört !**

- ? welche und wie weit sollen Passpunkte wirken   ⇒ **Einflussradius ?**
- ? wie stark soll ihre Wirkung abnehmen       ⇒ **Kern- / Basisfunktion ?**
- ? wie wirkt eine Passpunktverteilung   ⇒ **Korrelation / Knotenfunktion ?**

Bei Koordinatenberechnungen im Katasterzahlenwerk gilt das «Nachbarschaftsprinzip». Die Neupunkte sollen sich den nächstgelegenen, in der Nachbarschaft befindlichen Passpunkten möglichst gut anpassen, damit ein *homogenes Punktfeld* ohne Spannungen im Nahbereich gewährleistet ist. Mit einer Vortransformation (HT) konnte dieser Forderung nicht in ausreichendem Masse entsprochen werden, da für alle Neupunkte das gleiche Transformationsverfahren galt. In den Passpunkten entstanden aus der Transformation Restklaffungen, die nun mit einem Interpolationsverfahren als Korrekturen an den Neupunkten angebracht werden sollen.

Statt «Einflussweite» wird auch von «Einflussradius» gesprochen.

## Interpolationsmethoden gewogenes Mittel

2 Interpolation nach gewogenem Mittel  
in der französischen CH eingesetzt

S. 63

**Kernfunktion:** interpolierter Wert im Punkt  $k$  
$$U_k = \frac{[p_i \cdot v_i]}{[p_i]}; \quad p_i = \frac{1}{s_i^\lambda + c}$$

$v_i$  : Residue (Restklaffung) im Passpunkt  $i$

$p_i$  : Gewicht  $i$

$s_i$  : Distanz vom Punkt  $k$  zum Passpunkt  $i$

$\lambda$  : regelt **Einflussweite**; i.A.  $\lambda = 1, 2$  (, selten 1.5)

$c$  : eine Konstante («Glättungswert»), meistens = 0

## Interpolationsmethoden      verbessertes gewogenes Mittel

**3** Interpolation nach verbessertem gewogenem Mittel      **TRANSINT**  
*in der ganzen CH eingesetzt*      S. 64-66

ermöglicht Transformation (2, 3, 4 oder 6 Parameter) und Interpolation

$dy_k = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_r \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{P}_r dy$  mit  $\mathbf{P}_r = \mathbf{P}^{1/2} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}^{1/2}$ ;  $\mathbf{A}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ ;  $\mathbf{R}$  siehe Folien 41-43

**Kernfunktion:**  $p_i = \frac{1}{s_i^2}$       s: Distanz zwischen Neupunkt und Passpunkt

**Einflussweite:** ist theoretisch unendlich, praktisch endet sie bei  $4 \cdot d_0$   
 die Wahl der **Maschenweite**  $d_0$  ist nicht trivial!  $\approx$  LFP-Abstand

**Korrelation**      zwischen den Passpunkten wird berücksichtigt  
 bei  $d_0$  ist  $r_{ij} = 50\%$ ; bei  $2 \cdot d_0$  ist  $r_{ij} = 8.6\%$ ; bei  $3 \cdot d_0$  ist  $r_{ij} < 5\%$

Der Interpolationswert im Punkt k beträgt  $dy_k = \dots$   
 analog für  $dx_k$

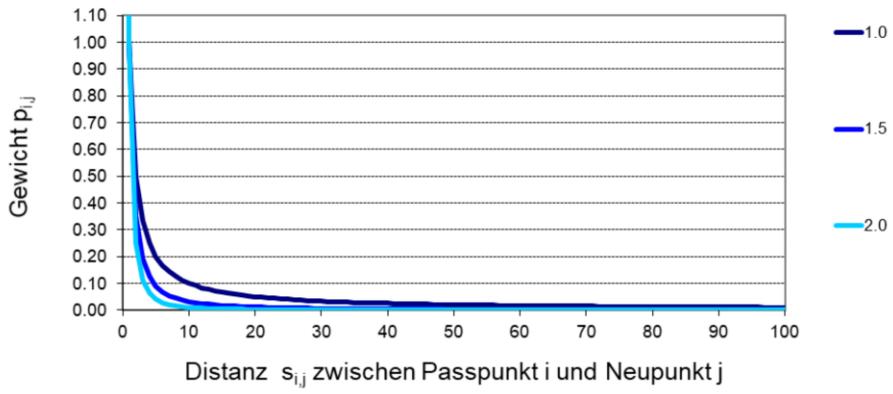
Die Korrelation r und die daraus gebildete Korrelationsmatrix **R** werden auf den Folien 41 bis 43 erläutert; ich trete hier nicht weiter auf sie ein.

### Interpolationsmethoden

### TRANSINT

3 Kern- oder Basisfunktion  $p = 1/s^\lambda$

$\lambda$



Details zur Korrelationsfunktion  $R$  siehe Folien 41 bis 43

## Interpolationsmethoden

## TRANSINT

### 3 Vorteile / Nachteile / Bemerkungen

- + in der CH breit eingeführt und verwendet
- + stabile Ergebnisse
- die Korrelationsfunktion  $r_{ij}$  ist nicht wissenschaftlich, sondern empirisch begründet
- für Praktiker kognitiv schwer zu bewältigen (Black Box)
- Stützpunktkoordinaten ändern wegen  $Q(0) = 0.9$
- $d_0$  muss willkürlich festgelegt werden
- kann im Interpolationsgebiet nicht variiert werden  $\Rightarrow$  Gebiet unterteilen!
- für Triangulationsnetze (**LFP2** – LFP3) mit 100 bis 200 Punkten entwickelt; für grosse Punktfelder der AV mit vielen Passpunkten sehr rechenintensiv!
  - $\Rightarrow$  neue Option « Lokal » verwenden (siehe nächste Folie)

«kognitiv bewältigen» heisst verstehen, «aha so geht das». Lernzielstufe 2 nach Bloom: «Fähigkeit zur Aufnahme (ins eigene Bewusstsein) und Verarbeitung von Zusammenhängen»

«sehr rechenintensiv» bedeutet: mehrere Stunden oder Tage oder gar ein Programmabsturz

## Interpolationsmethoden

## TRANSINT

### 3 neue Option « Lokal » in GeoSuite-TRANSINT

<input checked="" type="checkbox"/>	Korrelation zwischen den Stützpunkten berücksichtigen
<input type="radio"/>	Global (für den ganzen Perimeter, stark erhöhte Berechnungsdauer)
<input checked="" type="radio"/>	Lokal, maximaler Radius [m]: <input type="text" value="1000"/>
	Minimale Anzahl von Stützpunkten: <input type="text" value="30"/>
	Maschenweite d0 [m]: <input type="text" value="500"/>

*Beispiel*

das heisst:

minimal 30 Stützpunkte sollen in einem Umkreis von 1'000 m vom aktuellen Neupunkt aus gesehen verwendet werden.

zwischen jeweils zwei Passpunkten mit Zwischenabstand von 500 m besteht eine Korrelation von 0.5

siehe Kapitel 8.3.2 (Seite 60) in der GeoSuite Benutzeranleitung

**Interpolationsmethoden**

Shepard (1968)

**4** ist identisch mit der **2 Interpolation nach gewogenem Mittel** S. 66-70

*siehe Folie 16*

**Kernfunktion:** interpolierter Wert  $U_k = f(\mathbf{x}) = \frac{[p_i \cdot v_i]}{[p_i]}$ ;  $p_i = w(\mathbf{x}) = \frac{1}{s_i^2} = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2}$

$s_i$  : Distanz vom Neupunkt  $\mathbf{x}$  zum Passpunkt  $\mathbf{x}_i$  (= Norm des Vektors  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_i$ )

dies ist die einfachste Form der inversen Distanzgewichtung (**IDW**)

$f(\mathbf{x})$  heisst **Interpolierende** oder **Interpolante**

ist in GeoSuite mit der Knotenfunktionsstyp «**konstant**» realisiert

⇒ **wird aber nicht zur Anwendung empfohlen !**

Wir führen im Neupunkt  $\mathbf{x}$  eine Gewichtung  $w_i$  ein. Variabel ist nur der zu interpolierende Neupunkt  $\mathbf{x}$ .

$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$  steht für die Norm der Vektordifferenz  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_i$ , was gleichbedeutend ist mit der Distanz zwischen Neupunkt  $\mathbf{x}$  und Passpunkt  $\mathbf{x}_i$  (im Ausgangssystem).

$f(\mathbf{x})$  ist der interpolierte Wert im Neupunkt  $\mathbf{x}$ , die sogenannte Interpolante oder Interpolierende (Funktion); in der Transformationsempfehlung ist sie mit  $U_k$  bezeichnet.

IDW ist ein international gebräuchliche Begriff und steht für «Inverse Distance Weighting»

$$f(\mathbf{x}) = \frac{[p_i \cdot v_i]}{[p_i]} ; p_i = w(\mathbf{x}) = \frac{1}{s_i^2}$$

Shepard

 $\Rightarrow$ 

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_w} W_i(\mathbf{x}) \cdot Q_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{N_w} W_i(\mathbf{x})} ; N_w < N$$

modified Shepard

## Interpolationsmethoden

modified Shepard (1988)

5

$$\text{Interpolante: } f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_w} W_i(\mathbf{x}) \cdot Q_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{N_w} W_i(\mathbf{x})} ; N_w < N$$

$N$  totale Anzahl der Passpunkte

$N_w$  die dem Neupunkte  $\mathbf{x}$  nächsten, zu verwendenden Passpunkte  $\mathbf{x}_i$

$W_i(\mathbf{x})$  Gewichtsfunktion **Kernfunktion**  $W_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2} - \frac{1}{R_x^2} , R_x = \max_{N_w} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$

**Einflussradius**  $R_x$ : maximale Distanz zwischen dem Neupunkt  $\mathbf{x}$  und seinen  $N_w$  benachbarten Passpunkten  $\mathbf{x}_i$ . Ausserhalb dieses Radius' wird der Funktionswert von  $W_i$  zu Null gesetzt.

$s_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$  Distanz vom Neupunkt  $\mathbf{x}$  zum Passpunkt  $\mathbf{x}_i$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{[p_i \cdot v_i]}{[p_i]} ; p_i = w(\mathbf{x}) = \frac{1}{s_i^2}$$

Shepard

⇒

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_w} W_i(\mathbf{x}) \cdot Q_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{N_w} W_i(\mathbf{x})} ; N_w < N$$

modified Shepard

## Interpolationsmethoden

## modified Shepard

**5**  $Q_i(\mathbf{x})$  ist die **Knotenfunktion**, die an die Stelle der Restklaffung  $v_i$  tritt:

$$Q_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + g ; \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{D \times D}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^D, g \in \mathbb{R}$$

ausmultipliziert (2D Fall, quadratisch):  $Q_i = ax^2 + 2bxy + dy^2 + ex + fy + g$

im  $i$ -ten Passpunkt  $\mathbf{x}_i$  ist zudem die Bedingung einzuhalten:  $Q_i(\mathbf{x}_i) - v_i = 0$

Die 6 vorerst unbekanntes Koeffizienten  $[a \ b \ d \ e \ f \ g]$  sind also aus mindestens 3 Stützpunkten zu bestimmen. Dies erfolgt in einer «vermittelnden Ausgleichung mit Bedingung zwischen den unbekanntes Parametern (auch Gauss-Markov-Modell genannt)»

Knotenfunktionstypen:

Konstant	<b>nicht empfohlen</b>
Linear	<b>empfohlen</b> (⇒ gute Genauigkeit)
Quadratisch	<b>empfohlen</b> (⇒ beste Qualität)
Schnell Linear	<b>nicht empfohlen</b>

---

Workshop Transformation / Interpolation
9.11.2020
23

Der Buchstabe R mit Doppelstrich steht für die Menge der *reellen Zahlen*. Weitere Erklärungen siehe z.B. [https://de.wikipedia.org/wiki/Reelle\\_Zahl](https://de.wikipedia.org/wiki/Reelle_Zahl)

Die **Knotenfunktion** (engl. nodal function) tritt an die Stelle der Restklaffung  $v_i$ . Sie ist eine lokale Approximation für  $v_i$  im Passpunkte  $\mathbf{x}_i$ . Sie ist eine bivariate, wahlweise quadratische, lineare oder konstante Funktion. Die Koeffizienten der Funktion resultieren aus einer gewichteten Kleinste-Quadrate-Einpassung auf einen Satz von  $N_q$  nächsten Nachbarn von  $\mathbf{x}_i$  mit der Bedingung  $Q_i(\mathbf{x}_i) = v_i$

beim linearen Typ fallen in der Gleichung die quadratischen Terme  $x^2$  und  $y^2$  weg.

Bei der **linearen** und der **quadratischen** Knotenfunktion werden ihre unbekanntes Koeffizienten mittels Kleinste-Quadrate-Einpassung berechnet. Die quadratische Funktion liefert beste Qualität, solange genügend Passpunkte vorliegen, um die Koeffizienten  $a$  bis  $g$  robust zu berechnen. Wenn die Passpunkte spärlich vorliegen, wird die lineare Knotenfunktion besser funktionieren.

Bei der **schnell linearen** Knotenfunktion werden die unbekanntes Koeffizienten mit schnellen Algorithmen (Gradienten Interpolation) berechnet statt mit Kleinste-Quadrate basierten. Geschwindigkeit ist dabei wichtiger als Qualität. Sie sollten sie nur benutzen, wenn Sie ihre Qualität und Stabilität auf

eine andere Weise testen können.

**Interpolationsmethoden**

modified Shepard

**5** Wahl der Parameter  $N_w$  und  $N_q$  $N_w$ : GeoSuite stellt auf  $N_w \geq 2^D + 1$  ein bzw. empfiehlt  $N_w \approx 2 \cdot N_q$ 

Parameter	Dimension D des Raumes		
	1	2	3
$N_w \geq$	3	5	9

 $N_q$ : Gibt man keinen Wert vor, stellt GeoSuite auf folgenden Wert ein:

Knotenfunktions- typ	Parameter	Dimension D des Raumes		
		1	2	3
<b>konstant</b> :	$N_q$ wird ignoriert	--	--	--
<b>linear</b> :	$N_q \geq$	3	5	9
<b>quadratisch</b> :	$N_q \geq$	5	9	15

Workshop Transformation / Interpolation

20.6.2013

24

ALGLIB empfiehlt:  $N_w$  kontrolliert den Algorithmus lokal (*Anmerkung des Verfassers: d.h. wie weit soll die Gewichtung wirken, vgl. Folie 22*). Zu grosse Werte machen die Interpolante zu global (die Berechnung wird langsam und die Interpolante unfähig, lokale Änderungen in der Interpolation zu reproduzieren). Andererseits führen zu kleine  $N_w$  zu spitzen und ungenauen Interpolanten. Ein guter Wert für  $N_w$  liegt normalerweise leicht höher als  $1.5 \cdot N_q$  sein wird.

$N_q$  kontrolliert einen anderen Aspekt der Nachbarschaft, nämlich die Anzahl der Knoten, die zur Bildung der eben beschriebenen Knotenfunktionen verwendet werden. Eine gute Knotenfunktion muss durch  $(x_i, y_i)$  gehen und sie sollte die Funktion in der Umgebung näherungsweise approximieren. Ein zu kleiner  $N_q$  Wert wird eine gute Approximation verunmöglichen.

Ein zu grosser  $N_q$  Wert wird zu einem globalen Verhalten führen; dies ist aber dort nicht sehr gut, wo es nötig wäre, nämlich im Einflussbereich von Passpunkten  $x_i$ .

**Interpolationsmethoden**

modified Shepard

**5** wie läuft der Algorithmus ab?

1. Passpunkte einlesen
2. Zu jedem Passpunkt  $\mathbf{x}_i$  werden die  $N_q$  nächsten Nachbarn gesucht ...
3. ... und die Koeffizienten **A**, **B** und  $g$  der Knotenfunktion  $Q_i(\mathbf{x})$  bestimmt.
4. Zu jedem Interpolationspunkt  $\mathbf{x}$  werden die  $N_w$  nächsten Nachbarn gesucht.
5. Die Gewichtsfunktion  $W_i(\mathbf{x})$  wird für diese Nachbarn berechnet.
6. Die Interpolante  $f(\mathbf{x})$  wird als gesuchte Residue des Punktes  $\mathbf{x}$  berechnet.

Vorteile / Nachteile der Shepard Methoden: siehe (Sievers 2020)

**Interpolationsmethoden**

## Polynome

**Polynom-Interpolationen**

S. 72-73

*viele Möglichkeiten*

**Kernfunktion:** hauptsächlich **bilinear** ( $m = n = 1$ ) oder **biquadratisch** ( $m = n = 2$ ),

$$U_k = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j$$

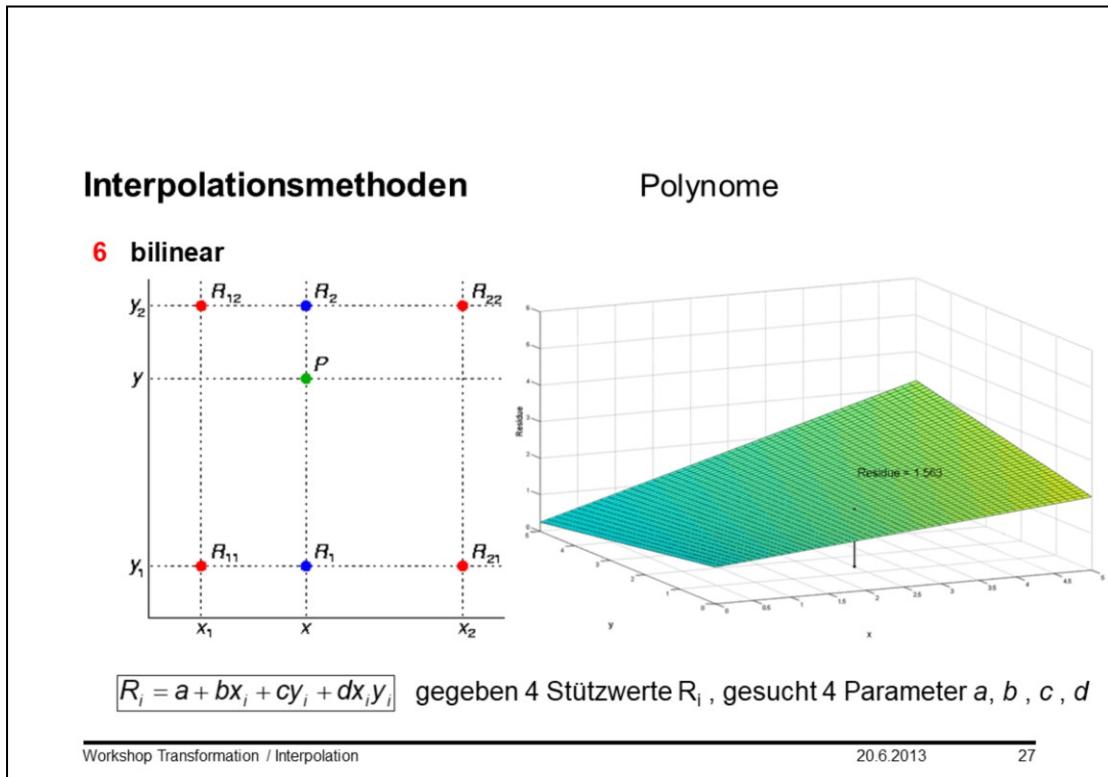
hin und wieder auch **bikubisch** ( $m = n = 3$ ) oder **bispline**

Sie sind geeignet für komplexe Fälle mit ausgeprägten lokalen Eigenheiten

Es braucht viele Passpunkte. Eine gitterförmige Passpunktanordnung wird empfohlen.

**Einflussweite:** begrenzt auf ein lokal verwendetes Passpunktfeld  
(4, 9 oder 16 Rasterpunkte)

Eine Funktion ist **bivariat**, wenn sie genau zwei unbestimmte Variablen enthält. Der Funktionswert  $f(x,y)$  hängt also von zwei («bi») Variablen  $x$  und  $y$  ab.



Gegeben sind Restklaffungen  $R_{11}$ ,  $R_{12}$ ,  $R_{21}$  und  $R_{22}$  in den roten Punkten eines Rasters, später Rasterzelle genannt.

Um die Restklaffung in  $P$  näherungsweise (durch lineare Interpolation) zu bestimmen, wird zunächst in eine festgelegte Richtung (horizontal oder vertikal, hier horizontal) zwischen den Rasterpunkten linear interpoliert. Dabei sind  $R_1$  und  $R_2$  Stützpunkte zwischen den in horizontaler Richtung liegenden Rasterpunkten.

Nach dem gleichen Verfahren wird anschliessend zwischen den Restklaffungen dieser beiden Stützpunkte interpoliert.

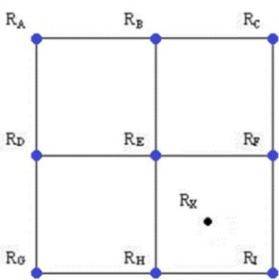
Der **Vorteil** der bilinearen Interpolationsmethode liegt in ihrer Einfachheit, der **Nachteil** darin, dass sie am Rand der Rasterzelle abbricht: die Residuen gehen zu den benachbarten Rasterzellen nicht stetig über, sondern es gibt eine harte Bruchkante. Dies entspricht im Allgemeinen nicht dem realen Verhalten der Werte, wie sie durch die Interpolation modelliert werden sollen.

#### Beispiele

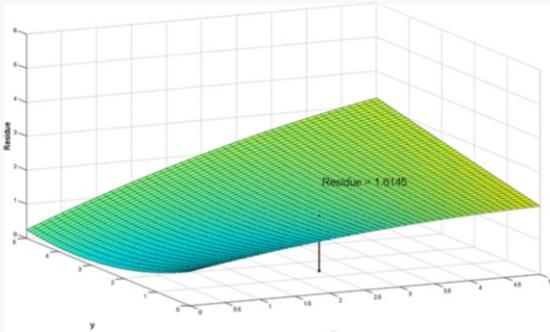
- DHM25-Matrixmodell von swisstopo (Produktinformation DHM25, Juni 2005)
- GeoSuite bietet sie an für die Interpolation eines regelmässigen Gitters (GeoSuite User Manual, November 2020, S. 62 und 67)
- swisstopo REFRAME plug-in for FME, Version 2.4 – February 2012, manual updated in January 2014 (ray)

## Interpolationsmethoden

7 biquadratisch



## Polynome



$$R_i = a + bx_i + cy_i + dx_i^2 + ex_iy_i + fy_i^2 + gx_i^2y_i + hx_iy_i^2 + ix_i^2y_i^2$$

gegeben 9 Stützwerte  $R_i$ , gesucht 9 Parameter  $a, b, \dots, i$

Workshop Transformation / Interpolation
20.6.2013
28

Gegeben sind Restklaffungen  $R_A \dots R_I$  in den Punkten eines Rasters.

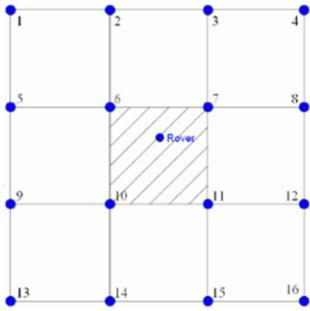
Durch die Verwendung von zusätzlichen Stützwerten verglichen mit der bilinearen Interpolation wird die eigentliche Interpolationsfläche dynamischer modelliert. Auf diese Weise entstehen bei den Übergängen der Interpolationsflächen zwischen Maschen weniger abrupte Wechsel, was dem wahren Verhalten der modellierten Werte (Residuen) eher entsprechen dürfte.

### Beispiele

- LSXS / SGF als Näherung für die Transformation LV03<->LV95 im GNSS-Empfänger (Leica, Trimble)
- GeoSuite bietet sie an für die Interpolation eines regelmässigen Gitters sowie des Geoidmodells in REFRAME)  
(GeoSuite User Manual, November 2020, S. 62, 67 und 88)
- swisstopo REFRAME plug-in for FME, Version 2.4 – February 2012, manual updated in January 2014 (ray)

## Interpolationsmethoden

**8 bikubisch** (geodätische Anwendung)



**9 bispline**

Ein kubischer Spline ist eine glatte Kurve, die durch die gegebenen Punkte im Raster-system geht und eine minimale Gesamtkrümmung aufweist. Jedes Teilstück ist dabei durch eine kubische Parabel definiert.

## Polynome

$$R_x = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j$$

gegeben 16 Stützwerte  $R_i$

gesucht 16 Parameter  $a_{00}, \dots, a_{33}$

---

Workshop Transformation / Interpolation
20.6.2013
29

Die Interpolante  $R_x$  wird mit einem Polynom 3. Grades berechnet

die algebraische Gleichung ist zu komplex, als dass ich sie hier darstellen möchte. Auch ein Bild der Interpolationsfläche habe ich bisher nicht erzeugt.

Anstelle eines Polynoms 3. Grades nennt die Literatur auch kubische Splines. Ein kubischer Spline ist eine glatte Kurve, die durch die gegebenen Punkte im Koordinatensystem geht und eine minimale Gesamtkrümmung aufweist.

Jedes Teilstück ist dabei durch eine kubische Parabel

$f(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$  mit geeigneten Koeffizienten  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  und  $d_i$  definiert.

### Beispiele (bikubisch)

- Implementiert im Zielerkennungs-Algorithmus in Qdaedalus zur Interpolation fehlender Pixel (Jonas Clerc, Präsentation 27.11.2015: Das bildbasierte Theodolitsystem Qdaedalus und seine Verwendungszwecke)
- GeoSuite bietet sie an für die Interpolation eines regelmässigen Gitters (GeoSuite User Manual, November 2020, S. 62 und 67)
- swisstopo REFRAME plug-in for FME, Version 2.4 – February 2012, manual updated in January 2014 (ray)



## Erkenntnisse 1

4 Lösungsansätze bieten sich zur Einpassung an: Transformationsempfehlung, S. 91  
gutes allgemeines Entscheidungsschema: Transformationsempfehlung, S. 94 - 97  
Jedes Operat ist ein Unikat. Deshalb resultiert in allen Fällen ein hoch **iterativer Prozess**: «trial and error» (es gibt keine «automatischen» Knopfdruck-Lösungen!)  
*denn die «Wahrheit» ist relativ und momentan*

Die Wahl des Interpolationsalgorithmus' beeinflusst die Güte der Interpolation nur gering. Viel wichtiger ist die Verteilung der Passpunkte und Kontrollpunkte (und die richtigen Parametereinstellungen).

Die Anzahl der erforderlichen Stützpunkte hängt von der Homogenität des bearbeiteten Spannungsgebietes ab. Sie lässt sich nicht verbindlich quantifizieren.

Die Verteilung der Stützpunkte soll das Gebiet repräsentieren und umfassen.

Die vorhandenen Passpunkte sind in Randzonen einer Interpolation allenfalls durch fiktive zu ergänzen.

S. 91: Lösungsansätze im grau hinterlegten Kasten

S. 95: Folie Ablauf Diagramm

Passpunkt und Stützpunkt sind synonyme Begriffe



## Erkenntnisse 2

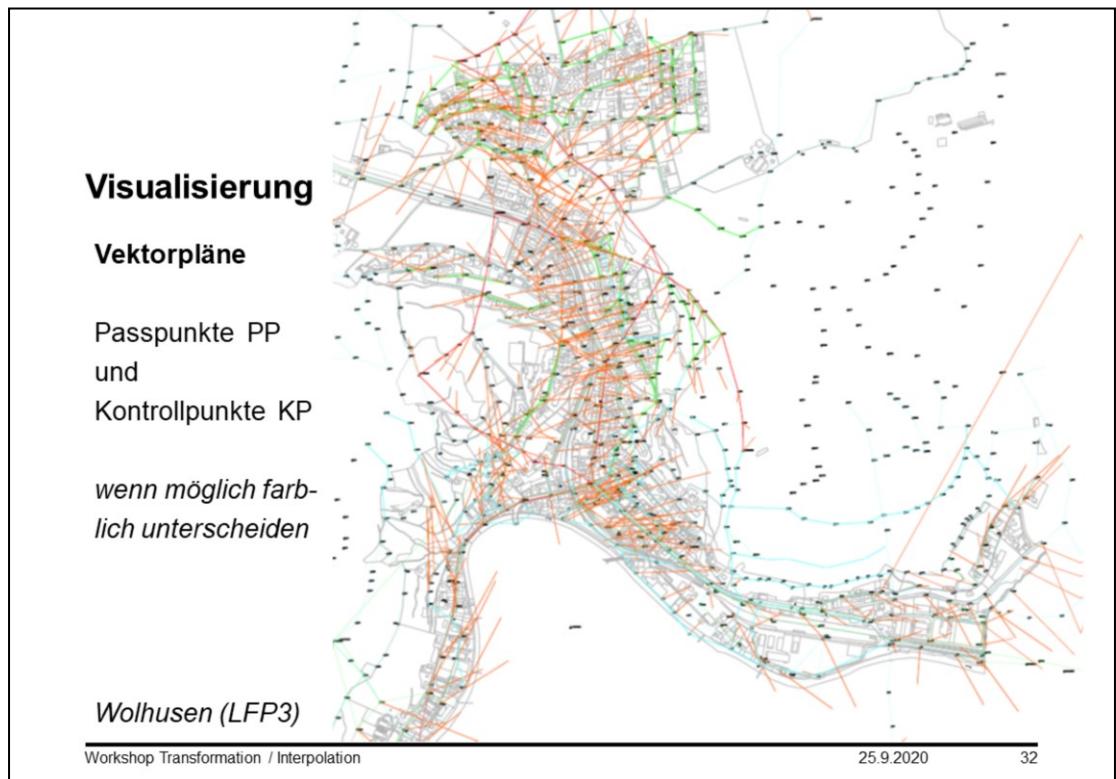
Die Zahl der Kontrollpunkte sollte 30% bis 50% der Stützpunkte betragen und ihre Umgebung ebenfalls repräsentieren.

Stützpunktmassierungen sollen in TRANSINT vermieden werden.

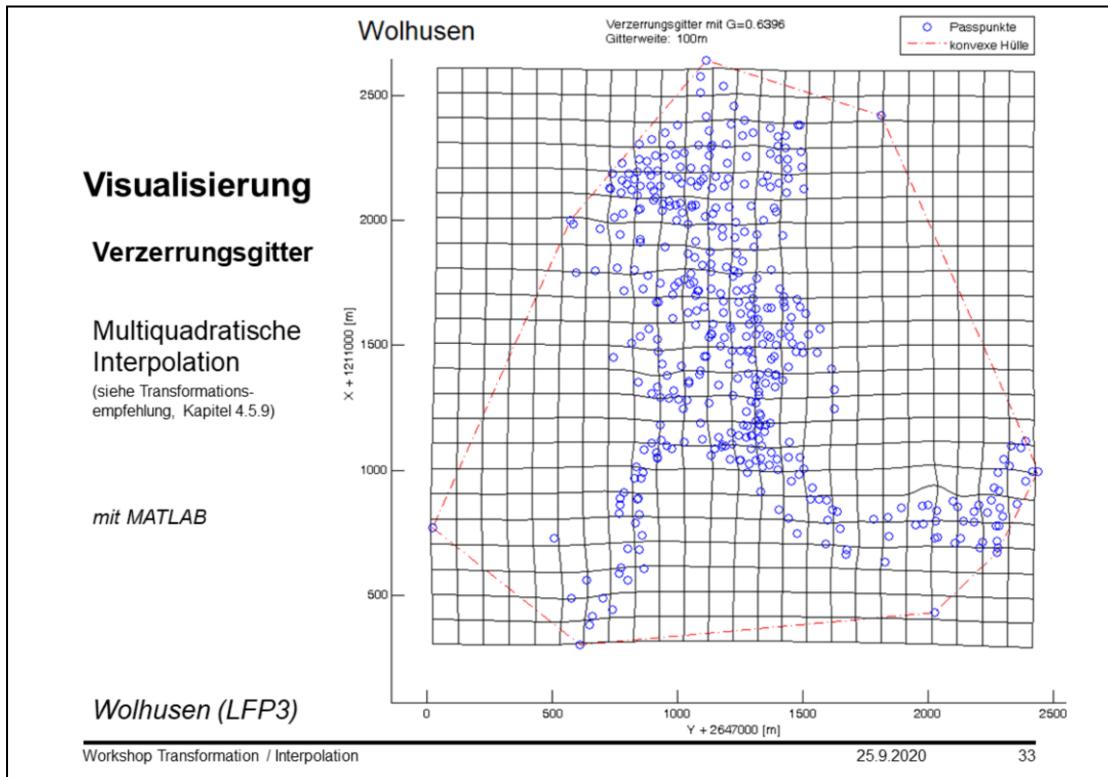
Die Toleranzen sind gut bemessen, die Sicherheit ist erheblich (95% oder 99%).

Wenn das Startsystem nicht in LV95 vorliegt, wird als **Vortransformation** vor den Entzerrungsarbeiten eine Translation, eine (robuste) Helmerttransformation oder eine REFRAME-Interpolation empfohlen

**Visualisieren ist zwingend !!!** ⇒ siehe nachfolgende Folien

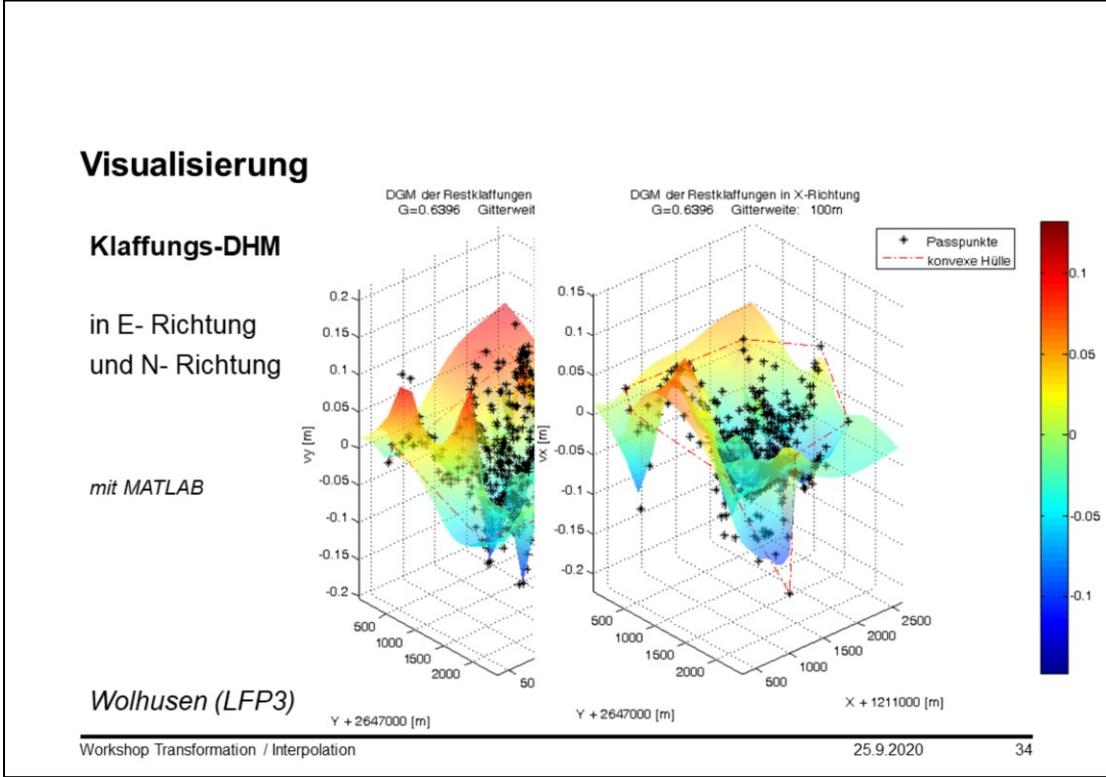


Dieser Plot ist noch provisorisch, denn es sind Ausreisser drin

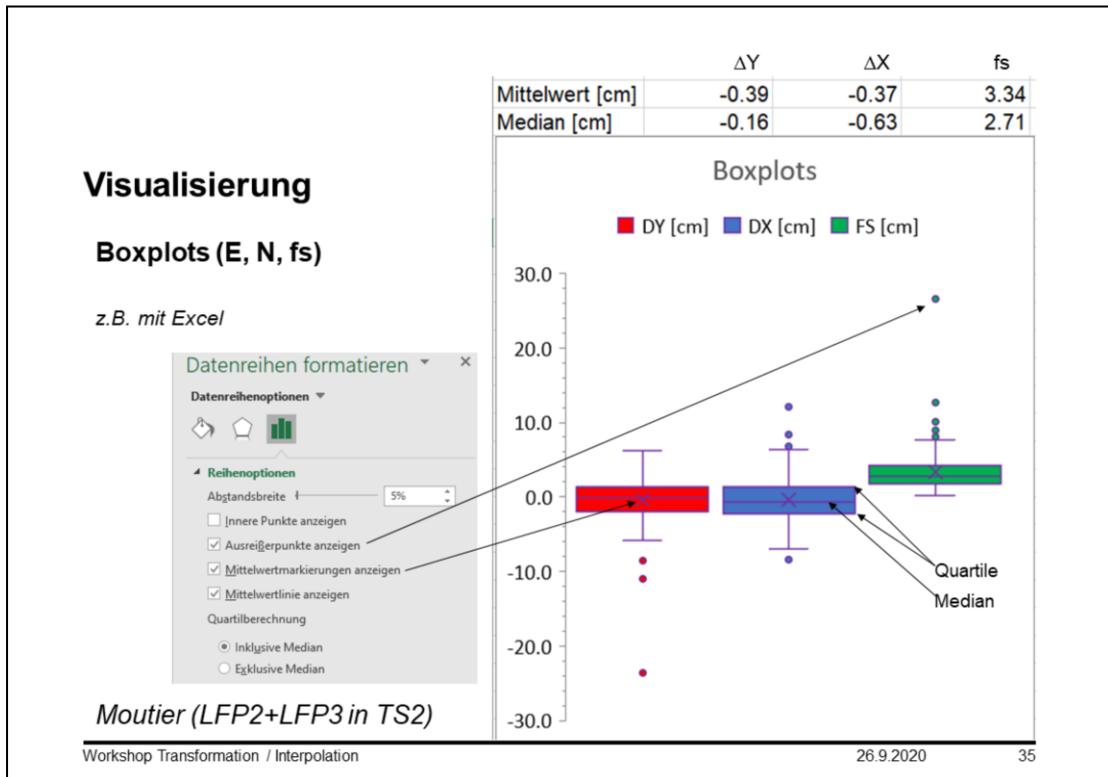


Die Multiquadratische Interpolation ist in der Transformationsempfehlung, Kapitel 4.5.9 auf den Seiten 75 und 76 beschrieben.

Sie ist vom Typ RBF (nicht IDW); zur Definition siehe auch [https://en.wikipedia.org/wiki/Radial\\_basis\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Radial_basis_function)



Diese Plots lassen sich in MATLAB räumlich drehen, so kann auch eine Orthogonalprojektion erzeugt werden.



Aus der Excel online Hilfe:

Die Linien in vertikaler Richtung werden als **«Whisker»** (Schnurrbart, Antenne) bezeichnet. Diese Linien geben die Streuung außerhalb der oberen und unteren Quartile an, und jeder Punkt außerhalb dieser Linien (oder Whisker) wird als Ausreisser betrachtet. Zur den Abständen der Whiskers siehe unten

**Abstandsbreite:** steuert den Abstand zwischen den Kategorien; d.h. die dargestellte Breite der Boxes (das Optimum ist durch Versuche zu ermitteln).

**Innere Punkte anzeigen:** zeigt die Datenpunkte an, die zwischen der unteren und der oberen Schnurrbart-Zeile liegen.

**Ausreißerpunkte anzeigen:** zeigt die Ausreisserwerte an, die sich entweder unterhalb der unteren oder oberhalb des oberen Schnurrbarts befinden. Zeile.

**Mittelwertmarkierungen anzeigen:** zeigt die Mittelwertmarkierung der ausgewählten Datenreihe an.

**Mittelwertlinie anzeigen:** zeigt die Verbindungslinie zwischen den Mittelwerten der Kästen in der ausgewählten Reihe an.

**Quartilberechnung:** Wählen Sie eine Methode für die Medianberechnung aus:

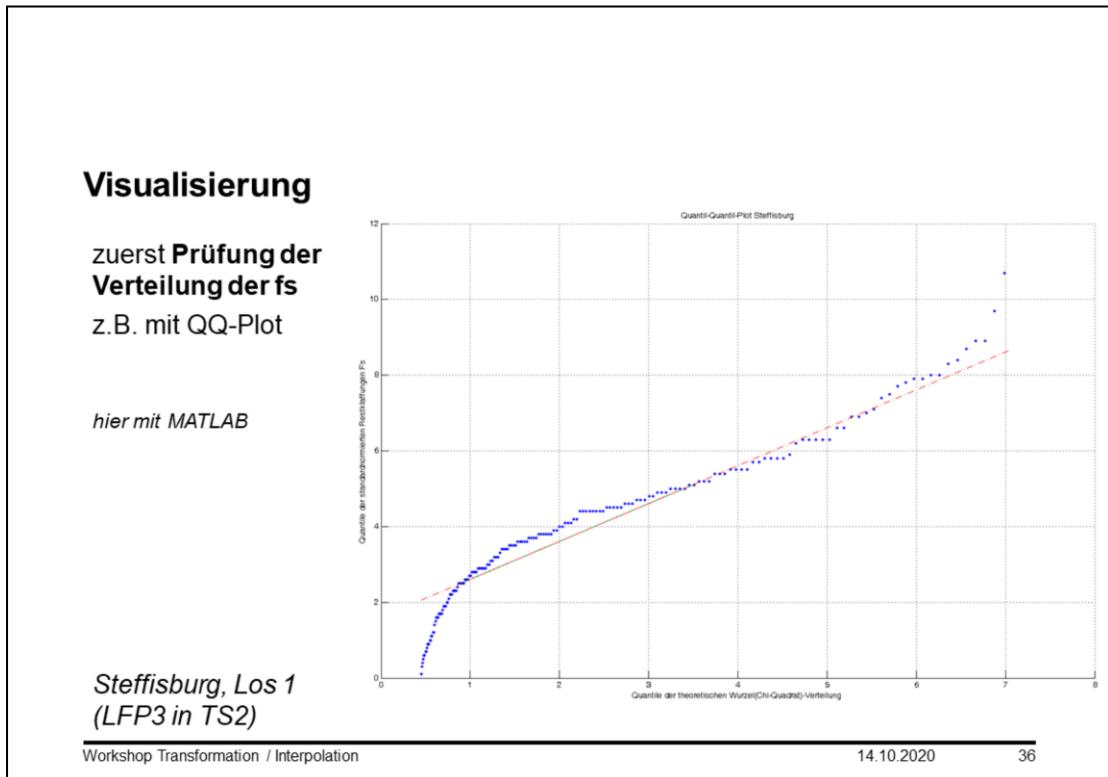
**Inklusiver Median** Der Median wird in die Berechnung einbezogen, wenn N (die Anzahl der Werte in den Daten) eine ungerade Zahl ist.

**Exklusiver Median** Der Median wird aus der Berechnung ausgeschlossen, wenn N (die Anzahl der Werte in den Daten) eine ungerade Zahl ist.

**Whisker** (Antenne): (Quelle: <https://matheguru.com/stochastik/box-whiskers-plot.html>)

Auch wenn die Whisker meistens das Minimum bzw. Maximum der Daten anzeigen, ist dies nicht einheitlich geregelt. Bei einigen Box-Whisker-Plots beziehen sich die Whisker auf den Interquartilsabstand. Da der Interquartilsabstand (IQR) auch verwendet wird, um **Ausreisser** zu bestimmen, werden Datenpunkte, die als Ausreisser klassifiziert wurden, bei einem solchen Box-Whisker-Plot meistens nach bzw. vor die Whisker aufgetragen. Meistens werden Ausreisser als Sternchen (\*) eingezeichnet, und bei konkreten Studien sieht man häufiger auch noch die konkrete Nummer des Datensatzes daneben geschrieben. Die Whisker befinden sich dann in der Regel bei  $3. \text{ Quartil} + 1,5(\text{IQR})$  für das Maximum und  $1. \text{ Quartil} - 1,5(\text{IQR})$  für das Minimum.

Bei dieser Konvention würde man allerdings normalerweise annehmen, dass beide Whisker dieselbe Länge haben, weil sie jeweils das 1,5-fache vom Median entfernt liegen. Allerdings ist es so, dass per Konvention meistens der letzte Datenpunkt, der innerhalb des Interquartilsabstand liegt, als der Punkt genommen wird, wo das Whisker endet.



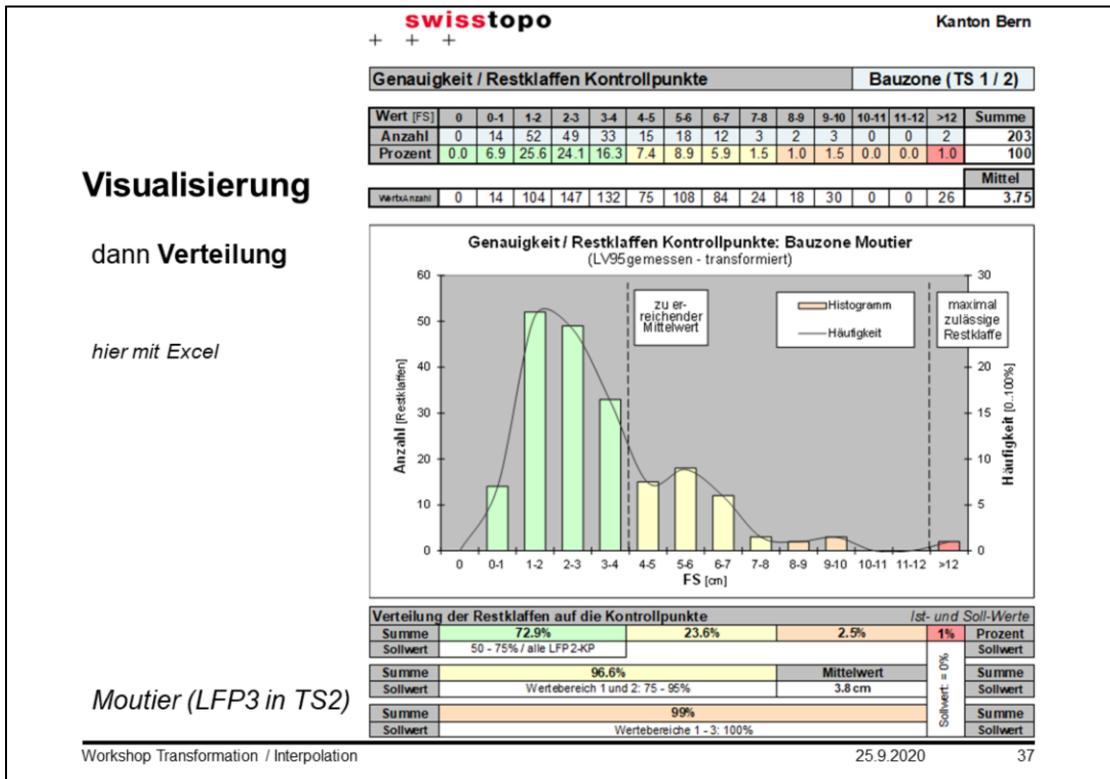
Vor weiteren statistischen Betrachtungen sollte geprüft werden, ob die realen Restklaffungen  $f_s$  wirklich Rayleigh verteilt sind. Das geschieht mit einem sogenannten QQ-Plot (Quantil-Quantil-Plot).

Auf der horizontalen Abszisse sind die realen Quantilwerte aufgetragen, auf der vertikalen Ordinate die theoretischen.

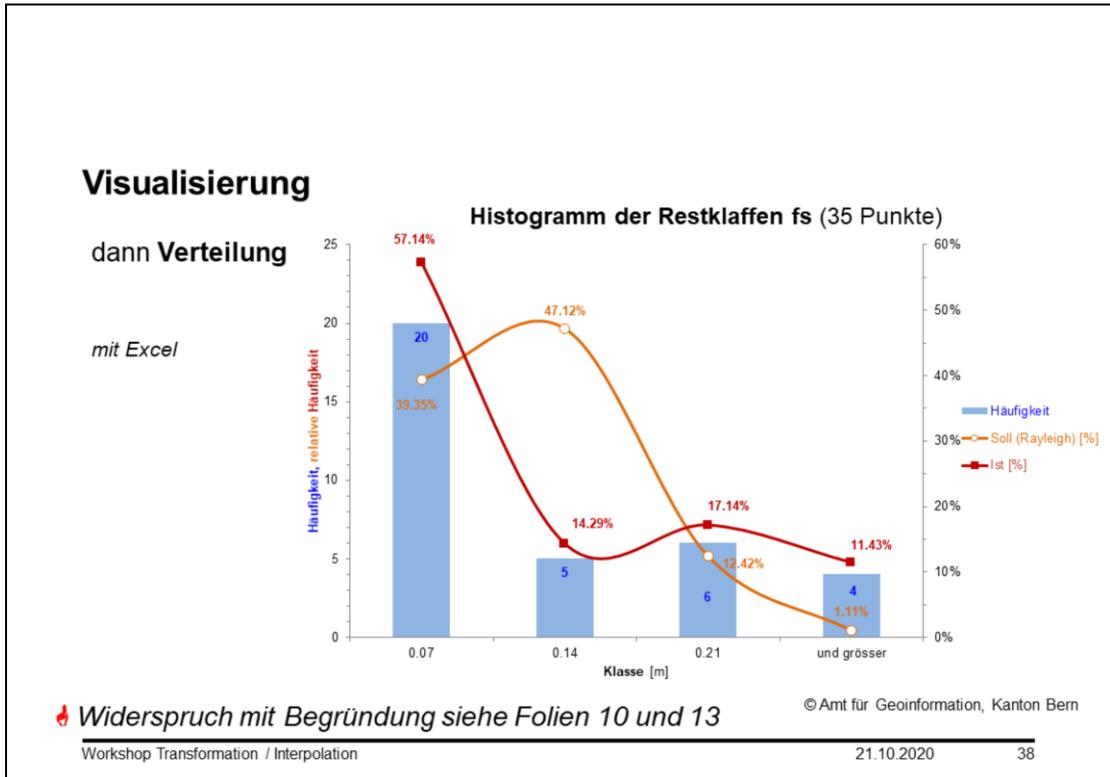
Die abweichenden Schwänze an den Rändern sind normal; wichtig ist, dass die  $f_s$  «in der Mitte» (hier etwa zwischen 1 und 6) ungefähr auf einer Linie liegen; diese Linie steigt mit 50 gon, d.h.  $\text{Tangens}(\text{Steigung}) = 1$

Man kann dies mit einem spezialisierten Statistikprogramm tun, mit Excel geht es (etwas umständlich) auch: Herstellung siehe

<https://www.statology.org/q-q-plot-excel/>



Diese Excel-Auswertung wurde verwendet, als es um die Verdichtung der Dreiecksvermaschung (Stufe Landesvermessung) durch die Kantone ging (Stufe Amtliche Vermessung). Aus diesen Untersuchungen entstand dann der CHENyx06-Datensatz



Und dies ist die Darstellungsform des Amtes für Geoinformation von ca. Mitte Oktober 2020, von mir leicht nachgebessert  
Leseanleitung: von 0-7cm, 7-14cm, 14-21cm, grösser als 21cm

Ich bezweifle jedoch diese Grenzwerte, meine Begründung ist auf den Folien 10 und 13

Hier wurde fälschlicherweise die Standardabweichung der Restklaffungen fs gleichgesetzt mit der Standardabweichung eines Passpunktes. Die Klassen müssten grössere Werte haben.

# Visualisierung

(Protokoll-Dateien) ein synthetisches Beispiel einer FHNW-Übung, mit GeoSuite berechnet

## Stützpunkte

Punkt	E Start [m]	N Start [m]	E Ziel [m]	N Ziel [m]
1	2614999.985	1264099.988	2615000.000	1264100.000
9	2615000.003	1264900.017	2615000.000	1264900.000
43	2615399.989	1264299.989	2615400.000	1264300.000
47	2615400.028	1264699.979	2615400.000	1264700.000
101	2616000.003	1264100.026	2616000.000	1264100.000
105	2615999.992	1264500.006	2616000.000	1264500.000
109	2616000.001	1264899.995	2616000.000	1264900.000

## Interpolierte Punkte und Verschiebungen

Punkt	E Start [m]	N Start [m]	E Ziel [m]	N Ziel [m]	$\Delta x$ [mm]	$\Delta y$ [mm]
1	2614999.985	1264099.988	2615000.000	1264100.000	15.2	11.7
9	2615000.003	1264900.017	2615000.000	1264900.000	-2.5	-17.1
43	2615399.989	1264299.989	2615400.000	1264300.000	11.4	10.8
47	2615400.028	1264699.979	2615400.000	1264700.000	-27.5	21.4
101	2616000.003	1264100.026	2616000.000	1264100.000	-3.4	-26.2
105	2615999.992	1264500.006	2616000.000	1264500.000	7.8	-5.6
109	2616000.001	1264899.995	2616000.000	1264900.000	-1.0	5.0
15	2615100.553	1264500.356	2615100.553	1264500.360	-0.1	4.6
64	2615600.568	1264400.340	2615600.579	1264400.349	10.5	8.9
82	2615800.568	1264200.332	2615800.566	1264200.310	-2.0	-22.2
84	2615800.574	1264400.334	2615800.582	1264400.330	7.9	-4.5
86	2615800.580	1264600.336	2615800.586	1264600.332	5.8	-4.0
93	2615900.572	1264300.330	2615900.575	1264300.315	2.4	-15.2
95	2615900.578	1264500.334	2615900.586	1264500.328	7.8	-5.6
OP1	2615650.567	1264500.338	2615650.565	1264500.347	-2.6	8.6
OP2	2615650.568	1264550.340	2615650.558	1264550.351	-10.7	11.0
OP3	2615800.573	1264550.336	2615800.580	1264550.331	7.3	-5.1
OP4	2615800.572	1264500.335	2615800.580	1264500.330	7.7	-5.4

**Fragen**



**jetzt ?**  
oder später an [sievers-frey@bluewin.ch](mailto:sievers-frey@bluewin.ch)



**Danke für Ihre Aufmerksamkeit !** *Thank You!*

---

Workshop Transformation / Interpolation 21.10.2020 40

Ich hoffe, nun die Grundlagen etwas aufgehellert und Erkenntnisse vermittelt zu haben und stehe für Fragen jetzt oder später gerne zur Verfügung.

Die Folien werden mit Kommentaren als PDF aufgeschaltet werden oder sind bei mir erhältlich.

## Interpolationsmethoden

## TRANSINT

### 3 Korrelationsfunktion

man nimmt die Funktion der Gauss'schen Glockenkurve und bildet die

Kovarianz  $C(d_{ij}) = C(0) \cdot e^{-B d_{ij}^2}$  (deren Varianz  $\sigma^2 = 1$  ist)

$d_{ij} = \sqrt{(y_{PP_i} - y_{PP_j})^2 + (x_{PP_i} - x_{PP_j})^2}$  : Distanz zwischen den Passpunkten i und j

und setzt  $C(0) = 0.9$  als Korrelation zwischen 2 sehr nahen Passpunkten ( $d_{ij} \rightarrow 0$ ), **aus Versuchen ermittelt**. Daraus folgt:

$$r_{ij} = 0.9 \cdot e^{-\ln(1.8) \left(\frac{d_{ij}}{d_0}\right)^2} \rightarrow B = \frac{\sqrt{\ln(1.8)}}{d_0} = \frac{0.767}{d_0}$$

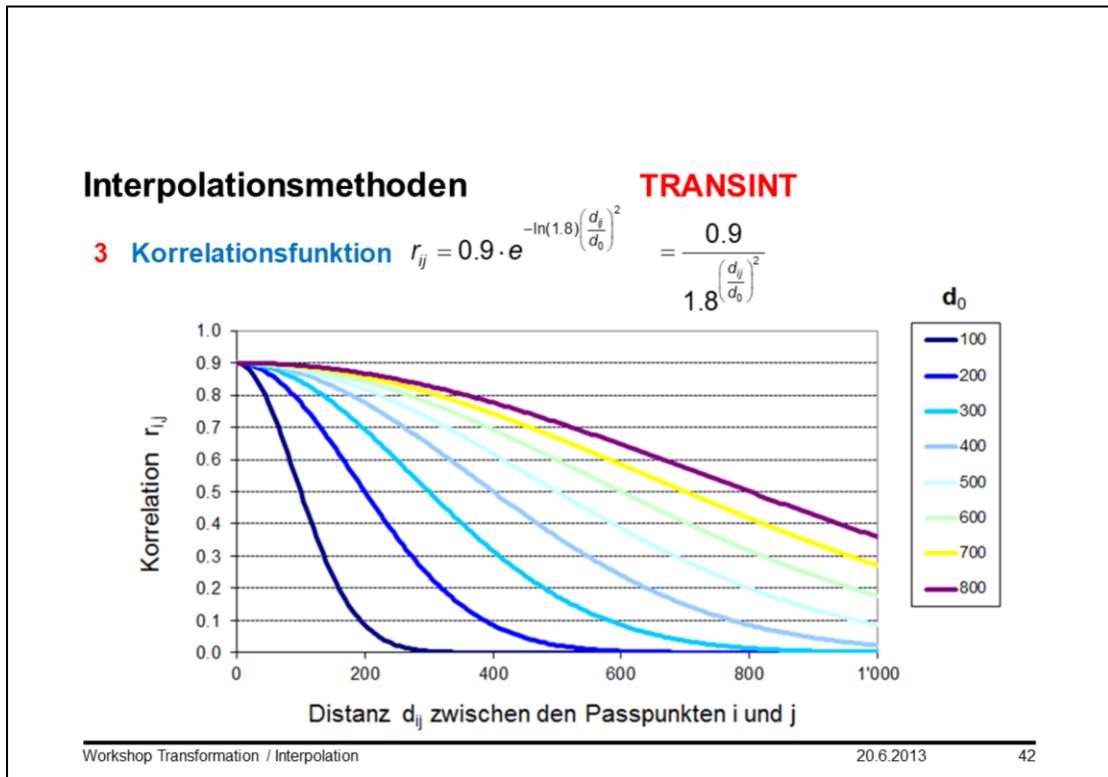
hergeleitet und begründet in: Carosio, A. (1980): Anwendung von Interpolationsverfahren in der Landestriangulation. In: VPK-MPG 78 (10):405-407.

Zum  $C(0)$  Wert vor der  $e$  – Funktion:  $C(0)$  ergibt die Korrelation zwischen 2 sehr nahen Punkten. Wenn sich dieser Wert 1 nähert, bedeutet dies, dass der zufällige Anteil (Rauschen) sehr klein ist. Bei  $C(0) = 1.0$  würden die Stützpunkte nach der Interpolation ihre Koordinaten behalten (keine Filterung). Diese erwünschte Eigenschaft wird von einer sehr störenden Erscheinung begleitet: Punkte im Interpolationsbereich können wesentlich grössere Korrekturen als die benachbarten Stützwerte erhalten. Eine kleine Reduktion von  $C(0)$ , z.B. 0.98 oder 0.95, führt zu wesentlich günstigeren Werten im Interpolationsbereich. Die so verursachten unerwünschten Änderungen der Stützpunktkoordinaten bleiben in der Regel klein.

Aus A. Carosio: Anwendung von Interpolationsverfahren in der Landestriangulation. VPK 10/1980, S. 405-407, <https://www.e-periodica.ch/cntmng?pid=geo-006%3A1980%3A78%3A%3A1112>

Der Wert  $B$  beeinflusst die Form der Kurve. Er ist in direktem Zusammenhang mit einem Interpolationsradius  $R$ , definiert als Distanz zwischen zwei Punkten, für welche die Korrelation 0.0001 ist. Es handelt sich um die Distanz, ab welcher sich die Stützpunkte praktisch nicht mehr auswirken.

Unklar bleibt die wissenschaftlich-geometrische Begründung des grünen Bereichs. Carosio erklärt ihn mit «Zur Berechnung der Korrelationskoeffizienten  $r_{ij}$  wurden zahlreiche Netze untersucht, um eine geeignete Korrelationsfunktion zu bilden. Die folgende Formel hat sich als gute Näherung für die üblichen Applikationen erwiesen.»



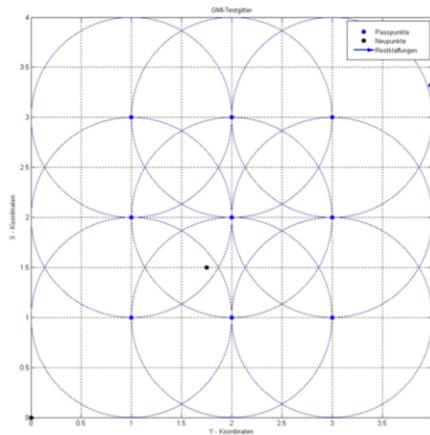
Bei klein gewähltem  $d_0$  nimmt die Korrelation bei grösser werdenden Distanzen  $d_{ij}$  schnell ab. Die lokalen Passpunkte innerhalb des Umkreises  $d_0$  vom Punkt  $i$  ausgesehen sind sehr schnell mit Punkt  $i$  hoch korreliert. Ausserhalb des Umkreises von  $d_0$  nimmt die Korrelation zwischen den lokalen Passpunkten schnell ab.

Je grösser  $d_0$  desto flacher wird die Korrelationsfunktion.

## Interpolationsmethoden

## TRANSINT

### 3 Korrelationsmatrix **R** (modelliert stochastische Abhängigkeit zwischen Passpunkten)



$$r_{ij} = 0.9 \cdot e^{-\ln(1.8) \left(\frac{d_{ij}}{d_0}\right)^2}$$

0.9	0.5	0.086	0.5	0.278	0.048	0.086	0.048	0.008
0.5	0.9	0.5	0.278	0.5	0.278	0.048	0.086	0.048
0.086	0.5	0.9	0.048	0.278	0.5	0.008	0.048	0.086
0.5	0.278	0.048	0.9	0.5	0.086	0.5	0.278	0.048
0.278	0.5	0.278	0.5	0.9	0.5	0.278	0.5	0.278
0.048	0.278	0.5	0.086	0.5	0.9	0.048	0.278	0.5
0.086	0.048	0.008	0.5	0.278	0.048	0.9	0.5	0.086
0.048	0.086	0.048	0.278	0.5	0.278	0.5	0.9	0.5
0.008	0.048	0.086	0.048	0.278	0.5	0.086	0.5	0.9

Diese synthetische Abbildung zeigt ein regelmässiges Passpunktfeld mit neun Punkten. Die Kreise entsprechen der Korrelation 0.5. Alle Punkte liegen jeweils auf dem Korrelationskreis des nächsten Passpunktes, da für  $d_0$  der Abstand 1.0 zwischen den Passpunkten gewählt wird.

Daraus entsteht die 9.9 Korrelationsmatrix **R**.