Genauigkeit von Restklaffungen

Restklaffungen (auch Residuen oder Restklaffen genannt) entstehen
- bei der Transformation von Passpunkten aus einem alten in einen neuen Bezugsrahmen
- als Differenz eines abgesteckten Punktes zu seinen (früher bestimmten) «Soll»-Koordinaten

Dieses Papier erläutert die Genauigkeiten, statistischen Verteilungen und signifikanten Grenzwerte von Restklaffungen.

1. Transformation

Im mathematischen Modell der Helmert- oder affinen Transformation werden die Koordinaten (y, x) eines Passpunktes im «alten» Start- oder Ausgangssystem als fehlerfreie Konstanten betrachtet (Standardabweichung 0.0 mm). Seine Koordinaten im «neuen» Zielsystem sind «beobachtete» Zufallsvariablen mit einer einheitlichen theoretischen Standardabweichung für die Y/E- und X/N-Koordinate. Alle diese Passpunktkoordinaten sind also gleich genau und haben das Gewicht 1.

Im Gleichungssystem der Transformation werden eine Translation, Rotation(en) und Massstab/ Massstäbe als unbekannte Parameter berechnet. Sie sind auf den Ursprung und die Achsen des Startsystems zu applizieren.

Die Berechnungen, Eigenschaften, Vor- und Nachteile sind in der Empfehlung (Bundesamt für Landestopografie swisstopo 2017) Kapitel 4.4.5 und 4.4.6 aufgeführt.

Die empirische Genauigkeit (Standardabweichung) m_0 der Gewichtseinheit berechnet sich zu

$$m_0 = \sqrt{\frac{[v_X v_X] + [v_Y v_Y]}{2n - u}}$$

mit

v_Y , v_X : Restklaffungsanteile, Residuen (d.h. Verbesserungen im Zielsystem)
n : Anzahl Passpunkte
u : Anzahl unbekannte Parameter (Helmert 4, affin 6)

Da alle Passpunktkoordinaten (im Zielsystem) das Gewicht 1.0 haben, ist die empirische Standardabweichung einer Koordinate Y oder E bzw. X oder N : $m_X = m_Y = m_0$

Dieser Wert soll den Richtwert der «Lagegenauigkeit (Standardabweichung) der Passpunkte» nach TVAV Art. 101 erfüllen.

Nun sind aber die Koordinaten der Passpunkte im Zielsystem (z.B. LV95, neu erhoben) meist viel genauer als ihre Koordinaten im Startsystem (z.B. gescannt aus alten Papierplänen). Auch ist es möglich, dass verfälschte Passpunkte (des Startsystems) zur Transformationsberechnung verwendet worden sind, was sich direkt auf die Residuen auswirkt und in einem hohen Wert von m_0 zeigt. Daher sagt m_0 weniger über die Genauigkeit der Restklaffungen oder der Beobachtungen Y oder E bzw. X oder N aus, als vielmehr über die Qualität des Transformationsmodells.

Oft wird auch der Helmert'sche Punktfehler verwendet, bei Transformationen **mittlerer Punktfehler** genannt:

$$m_P = m_0 \cdot \sqrt{2}$$

Der Helmert'sche Punktfehler ist jedoch kein statistisches Mass und folgt keiner Wahrscheinlichkeitsverteilung! Er ist ein häufig benutztes **skalares Kriterium zur Beurteilung der Lagegenauigkeit**, d.h. er ist eine Zahl und hat nichts mit einer statistischen Verteilung zu tun.

2. Differenz aus Koordinaten

Für die Koordinaten (Zufallsvariablen) x_i bzw. y_i der Punkte wird meist eine Normalverteilung angenommen. Wenn dies zutrifft, sind auch die Koordinatendifferenzen $\Delta x = x_2 - x_1$ bzw. $\Delta y = y_2 - y_1$ aus zwei voneinander unabhängigen Bestimmungen (Epoche 1 und 2, nachfolgend durch die Indizes gekennzeichnet) normalverteilte Zufallsvariablen. In der amtlichen Vermessung wird zudem die Lagegenauigkeit der Punkte isotrop angenommen, d.h. $\sigma_{x_1} = \sigma_{y_1}$ und $\sigma_{x_2} = \sigma_{y_2}$. Wichtig ist dabei, dass realistische theoretische (apriori) Standardabweichungen σ angenommen werden.

Liegen Koordinatenlisten und Standardabweichungen beider Epochen vor, kann wie folgt verfahren werden:

1. Differenzen Δx und Δy der Lagekoordinaten rechnen; ΔH bei Höhenberechnungen
2. Restklaffung $fs = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ rechnen
3. Theoretische (apriori) Genauigkeiten σ_{fs} bzw. $\sigma_{\Delta H}$ rechnen:
   a) Lage: $\sigma_{fs} = \sqrt{\sigma_{\Delta x}^2 + \sigma_{\Delta y}^2} = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2}$
   wenn isotrop: $\sigma_{fs} = \sqrt{2\sigma_{x_1}^2 + 2\sigma_{x_2}^2}$, wobei $\sigma_{x_1} = \sigma_{y_1}$ und $\sigma_{x_2} = \sigma_{y_2}$
   b) Höhe: $\sigma_{\Delta H} = \sigma_{\text{Höhenverschiebung}} = \sqrt{\sigma_{\text{Höhe}_1}^2 + \sigma_{\text{Höhe}_2}^2}$
4. Die Nullhypothese für den Signifikanztest formulieren: «Es liegt keine signifikante Verschiebung vor, d.h. die Abweichung ist zufällig.» Dies trifft zu, wenn die Prüfgrösse $\frac{fs}{\sigma_{fs}}$ oder $\frac{\Delta H}{\sigma_{\Delta H}}$ kleiner oder gleich einem Grenzwert ist. Zur Festlegung dieses Grenzwertes muss die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Prüfgrösse angenommen werden. Diese ist bei Höhendifferenzen meist die Normalverteilung, bei Lageverschiebungen die Rayleigh-Verteilung, siehe Kapitel 3.
5. Wenn die Mächtigkeit der Stichprobe (Anzahl betrachtete Punkte) genügend gross ist, sollte untersucht werden, ob die Δx, Δy, ΔH normalverteilt und die fs wirklich Rayleigh verteilt sind. Das geschieht mit sogenannten Quantil-Quantil-Plots oder Boxplots. Boxplots sind nur bei normalverteilten Stichproben sinnvoll, also bei Δx, Δy, ΔH.
6. Im Signifikanztest werden nun die Grenzwerte bestimmt:
   Unter Annahme eines Signifikanzniveaus von S = 95% beträgt der Grenzwert
   bei Höhendifferenzen ΔH: 1.96 (wenn Normalverteilung angenommen wurde)
   bei Lageverschiebungen fs: 2.45 (Herleitung siehe Kapitel 3)
   Unter Annahme eines Signifikanzniveaus von S = 99% beträgt der Grenzwert
   bei Höhendifferenzen ΔH: 2.58 (wenn Normalverteilung angenommen wurde)
   bei Lageverschiebungen fs: 3.03 (Herleitung siehe Kapitel 3)

Dieses Analyseverfahren wurde von (Wieser; Lienhart; Brunner 2003) erstmals beschrieben und von (Furrer; Sievers 2009) auf schweizerische Fragestellungen adaptiert und ergänzt.

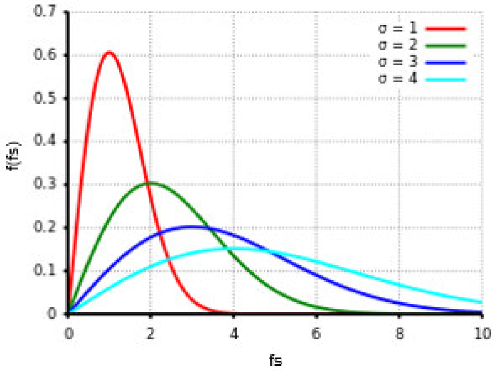
3. Statistische Verteilung von Restklaffungen

Koordinaten sind (meist) normalverteilte Zufallsvariablen. Quadriert man diese, so sind sie Chi-Quadrat verteilt, dies ist auch die Summe von quadrierten Zufallsvariablen. Demnach ist die Wurzel der Quadratesumme (also die vermutete Verschiebung fs) Wurzel(Chi-Quadrat) verteilt mit Freiheitsgrad 2 (da zwei Epochen). Die Wurzel der Chi-Quadrat Verteilung ist identisch mit der

Rayleigh Verteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte: $f(fs|\sigma_{fs}) = \begin{cases} \dfrac{fs}{\sigma_{fs}^2} e^{-\frac{fs^2}{2\sigma_{fs}^2}} & fs \geq 0 \\ 0 & fs < 0 \end{cases}$

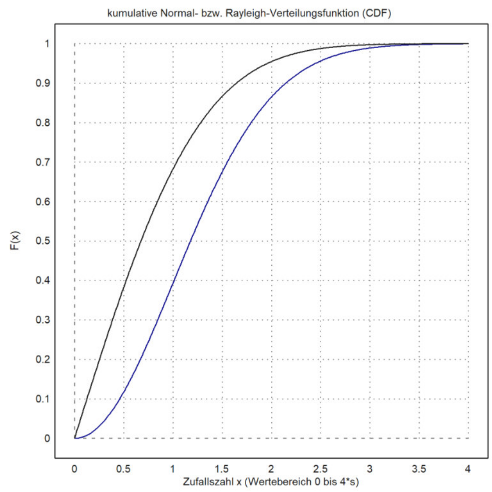
englisch PDF: Probability density function



Verteilungsfunktion $F(fs) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{fs^2}{2\sigma_{fs}^2}} & fs \geq 0 \\ 0 & fs < 0 \end{cases}$

hier blau dargestellt, im Vergleich mit der Normalverteilung (schwarz)

englisch CDF: Cumulative distribution function



Erwartungswert (theoretischer Mittelwert)	$E(fs) = \sigma_{fs}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Median	$\sigma_{fs}\sqrt{2 \cdot \ln(2)}$

Alle statistischen Verteilungen und ihre Kennwerte gelten nur bei zufällig abweichenden Werten y, x, Y bzw. E, X bzw. N, fs. Systematisch abweichende Werte oder Ausreisser bzw. grobe Fehler verfälschen die Ergebnisse und sind vorher aus den Eingangsdaten auszuscheiden.

Die Rayleigh Funktionen sind in Excel leider nicht direkt einprogrammiert, weshalb sie von Hand definiert werden müssen.

Für eine gegebene Standardabweichung σ_{fs} und die gewünschte Sicherheitswahrscheinlichkeit $(1-\alpha)$ kann der Quantilwert = Grenzwert berechnet werden: $\text{Grenzwert} = \sqrt{-2\sigma_{fs}^2 \cdot \ln(1-(1-\alpha))}$

Sicherheit $(1-\alpha)$	σ	Rayleigh-Verteilung	Normal-Verteilung
95%	1.0	2.4477	1.9600
99%	1.0	3.0349	2.5758

4. Literatur

Bundesamt für Landestopografie swisstopo (2017): Empfehlung für die Anwendung geometrischer Transformationsmethoden in der amtlichen Vermessung. 3. Aufl. Wabern: Geodäsie und Eidgenössische Vermessungsdirektion.

Furrer, Michael; Sievers, Beat (2009): «Qualitätsindikatoren für den Bezugsrahmenwechsel LV03-LV95.» In: Geomatik Schweiz: Geoinformation und Landmanagement, 107 (2009), 01, S. 20–24. Online im Internet: URL: http://www.geomatik.ch/fileadmin/download/2009/Fach/FA_1_2009_4.pdf

Wieser, Andreas; Lienhart, Werner; Brunner, Fritz K. (2003): «Nachbarschaftstreue Transformation zur Berücksichtigung von Spannungen im amtlichen Festpunktfeld.» In: Österreichische Zeitschrift für Vermessung & Geoinformation, 91 (2003), 2, S. 115–122.